

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) Ta có

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

b) Ta có

$$(a - 1)(b - 1) + 2\sqrt{ab} = 1 \Rightarrow ab = a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Vì $a < b$ nên $\sqrt{ab} = \sqrt{b} - \sqrt{a}$.

Vậy $P = -1$.

Câu 2.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$x^2 = (m + 5)x - m \Leftrightarrow x^2 - (m + 5)x + m = 0 \quad (1).$$

Ta có

$$\Delta = (m + 5)^2 - 4m = (m + 3)^2 + 16 > 0, \forall m$$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lý Viet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = m. \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} M^2 &= (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= (m + 5)^2 - 4m = (m + 3)^2 + 16 \geq 16 \end{aligned}$$

Do $M > 0$ nên $M \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $m = -3$.

Vậy $M_{\min} = 4$.

Câu 3. Gọi vận tốc của xe máy là x km/h ($x > 0$). Khi đó vận tốc của ô tô là $\frac{3x}{2}$ km/h.

Theo đề bài ta có phương trình

$$1,5 \cdot x + 1,5 \cdot \frac{3x}{2} = 150 \Leftrightarrow x = 40.$$

Do đó, vận tốc của xe máy là 40 km/h và vận tốc của ô tô là 60 km/h.

Sau khi gặp nhau, thời gian ô tô đi đến B là:

$$\frac{150}{60} - 1,5 = 1 \text{ (giờ)}.$$

Sau khi gặp nhau, thời gian xe máy đi đến A là:

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (y-1)^3 + 2xy(x+y-2) = 0$$

Đặt $a = x - 1, b = y - 1$, ta có

$$a^3 + b^3 + 2(a+1)(b+1)(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2(a+1)(b+1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b + 2) = 0$$

Xét $P = a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b + 2$. Ta có

$$P = a^2 + (b+2)a + b^2 + 2b + 2$$

$$= \left(a + \frac{b+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+2}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} > 0$$

Suy ra $a + b = 0$. Vậy $S = 2$.